جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨
أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة: ساعة ونصف
الدرجة العظمى: (١٠٠) درجة
الاسم: [illegible]

السؤال الأول (١٥ درجة):

أثبت أن كل مجموعة محدودة $M \subset E^n$ شبه متراصة (في حالة كان E حقيقي فقط).

السؤال الثاني (١٥ درجة):

ليكن $A: B \to B$ مؤثر خطي ومتراص من فضاء بناخ في نفسه. أثبت أن نصف القطر الطيفي يعطى بالعلاقة:

$$r_{\sigma(A)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

السؤال الثالث (١٥+١٠=٢٥ درجة):

أ- أثبت أنه إذا كان الفضاء الخطي المنظم X متراصاً فإنه يكون تاماً وفصولاً.

ب- ليكن $A: B \to B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء بناخ في نفسه تحقق أن $\sigma(A) \neq \phi$.

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $A_n: \ell_2 \to \ell_2$ المعرفة بالشكل:

$$A_n(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots) = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,0,0,0,\ldots)$$

أثبت أن حدود المتتالية متراصة، ولكن نهايتها $\lim_{n\to\infty} A_n$ مؤثر غير متراص. هل مؤثر النهاية مع ذكر التعليل هو: مؤثر إسقاط أو مؤثر موجب أو مؤثر [illegible].

السؤال الخامس (١٠+١٥=٢٥ درجة):

١- ليكن $A: B \to B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء بناخ في نفسه أثبت أنه إذا كان A^{-1} موجوداً وينتمي إلى $L(B,B)$ فستكون $\sigma(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\right\}$.

٢- عرف ما يلي: نظيم هيلبرت شميت للمؤثر A - شكل ثنائي الخطية المحدود.

انتهت الأسئلة   مدرس المقرر

حمص ١٦ / ١ / ٢٠١٨م   مع التمنيات بالنجاح والتوفيق   الدكتور سامح العرجه

جامعة البعث | سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢) | المدة : ساعتان
كلية العلوم | امتحانات الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨ | العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات | لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي | الاسم :

جواب السؤال الأول (١٥ درجة):

(في حال كان E حقيقي) : بما أن E^n فضاء خطي ذو n بعد فتوجد قاعدة

مكونة من n عنصر وهي $u_1,u_2,...,u_n$ وبالتالي $\forall u\in E^n$ فإنه توجد $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R$ بحيث

2

$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_nu_n$ ويكون $\|u\|_{E^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ، وبالتالي من أجل أي عنصر

$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ يوجد $u=x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n\in E^n$ ،لنأخذ التطبيق :

$$\varphi:E^n\to R^n:u=x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n\ \mapsto\ \varphi(u)=(x_1,x_2,...,x_n)=x$$

فنجد أن هذا التطبيق :

2

معرف تماماً : لأنه مهما يكن $u=x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n, v=y_1u_1+y_2u_2+...+y_nu_n\in E^n$

بحيث $u=v$ فإن $x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n=y_1u_1+y_2u_2+...+y_nu_n$ وبالمطابقة نجد أن

$x_i=y_i\ ,\ i=1,2...n$ وبالتالي $(x_1,x_2,...,x_n)=(y_1,y_2,...,y_n)$ أي أن $\varphi(u)=\varphi(v)$ وبالتالي

تحقق الاقتضاء : $u=v\ \Rightarrow\ \varphi(u)=\varphi(v)$ فالتطبيق φ معرف تماماً .

2

خطي : لأنه مهما يكن $u=x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n, v=y_1u_1+y_2u_2+...+y_nu_n\in E^n$ ومهما

يكن $\lambda,\mu\in R$ فإن :

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=\varphi(\lambda x_1u_1+\lambda x_2u_2+...+\lambda x_nu_n+\mu y_1u_1+\mu y_2u_2+...+\mu y_nu_n)\ \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=\varphi\{(\lambda x_1+\mu y_1)u_1+(\lambda x_2+\mu y_2)u_2+...+(\lambda x_n+\mu y_n)u_n\}\ \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,...,\lambda x_n+\mu y_n)\ \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u+\mu v)=(\lambda x_1,\lambda x_2,...\lambda x_n)+(\mu y_1,\mu y_2,...\mu y_n)=\lambda(x_1,x_2,...x_n)+\mu(y_1,y_2,...y_n)=\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v)$$

فالتطبيق خطي أي أن $\varphi(\lambda u+\mu v)=\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v)$

2

يحافظ على النظيم : لأن $\|u\|_{E^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_{R^n}=\|\varphi(u)\|_{R^n}$.

متباين : لأنه مهما يكن $u=x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n, v=y_1u_1+y_2u_2+...+y_nu_n\in E^n$ بحيث

فإن $\varphi(u)=\varphi(v)$ وبالتالي $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ وبالتالي $i=1,2,\ldots n$, $x_i=y_i$ ومنه

$x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n=y_1u_1+y_2u_2+\ldots+y_nu_n$ وبالتالي $u=v$ وبالتالي تحقق الاقتضاء :

$\varphi(u)=\varphi(v) \Rightarrow u=v$ فالتطبيق φ متباين .

غامر : من أجل أي عنصر $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)\in R^n$ يوجد عنصر $u=x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n\in E^n$ بحيث

$\varphi(u)=x$. مما سبق نجد أن التطبيق φ إيزومورفيزم من E^n في R^n .

الآن ، لتكن $M\subset E^n$ مجموعة محدودة ولنثبت أنها شبه متراصة ، لتكن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ متتالية من

عناصر M عندئذٍ يكون $u^N=\alpha_1^Nu_1+\alpha_2^Nu_2+\ldots+\alpha_n^Nu_n$ من أجل $N=1,2,\ldots$ حيث

$N=1,2,\ldots$, $j=1,2,\ldots,n$, $\alpha_j^N\in R$ وبما أن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ عناصر من المجموعة المحدودة

M فإن $N=1,2,\ldots$, $\|u^N\|_{E^n}<c$, $\exists c>0$ ولكن $\|u^N\|_{E^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي

$\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}<c$ وبالتالي $|\alpha_j^N|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}<c$ أي ان $|\alpha_j^N|<c$ وذلك أياً كان

$N=1,2,\ldots$ و $j=1,2,\ldots,n$ أي أن المتتالية العددية $\{\alpha_j^N\}_{N=1}^{\infty}$ محدودة في R وذلك أياً كان

$j=1,2,\ldots,n$ وحسب مبرهنة فإن هذه المتتالية تملك متتالية جزئية متقاربة ولتكن $\{\alpha_j^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$

ولتكن α_j^0 نهاية هذه المتتالية أي أن $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_j^{N_k}=\alpha_j^0$ وبالتالي توجد في المتتالية الاختيارية

$\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ التي أخذناها في البداية من المجموعة M متتالية جزئية هي $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث

$u^{N_k}=\alpha_1^{N_k}u_1+\alpha_2^{N_k}u_2+\ldots+\alpha_n^{N_k}u_n$ من أجل $k=1,2,\ldots$ وهي متقاربة من العنصر :

$$\lim_{k\to\infty}u^{N_k}=\lim_{k\to\infty}(\alpha_1^{N_k}u_1+\alpha_2^{N_k}u_2+\ldots+\alpha_n^{N_k}u_n)=$$

$$=(\lim_{k\to\infty}\alpha_1^{N_k})u_1+(\lim_{k\to\infty}\alpha_2^{N_k})u_2+\ldots+(\lim_{k\to\infty}\alpha_n^{N_k})u_n=\alpha_1^0u_1+\alpha_2^0u_2+\ldots+\alpha_n^0u_n=u^0$$

أي أن : $\lim\limits_{k\to\infty}u^{N_k}=u^0$ فالمتتالية $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة ،وبالتالي M شبه متراصة وهو المطلوب

جواب السؤال الثاني (١٥ درجة): لدينا $|\lambda|\leq\|A\|$ أياً كان $\lambda\in\sigma(A)$ وبالتالي فإن $r_{\sigma(A)}\leq\|A\|$ ولما

كان $\sigma(A^n)=[\sigma(A)]^n$ وبما أن $r_{\sigma(A^n)}\leq\|A^n\|$ فإن $r_{\sigma(A)}=\sqrt[n]{r_{\sigma(A^n)}}\leq\sqrt[n]{\|A^n\|}$ وبالتالي فإن :

$$r_{\sigma(A)} \le \lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{\|A^n\|} \le \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

لدينا $\|A\| < |\lambda|$ ، $(A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$ وبأخذ $\zeta = \frac{1}{\lambda}$ فإن :

$$(A-\lambda I)^{-1} = -\zeta\sum_{n=0}^{\infty} A^n\zeta^n \quad , \quad |\zeta| < \frac{1}{\|A\|}$$

وبما أن كل متسلسة قوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$ لها نصف قطر تقارب r وتكون هذه المتسلسلة متقاربة عندما $|\zeta| < r$ وإن نصف قطر التقارب هذا يحسب من العلاقة $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}}$ وبالتالي وبما ان $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\zeta^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\||\zeta|^n$ فتكون هذه السلسة متقاربة إذا كان $|\zeta| < r$ أي أن $|\lambda| = \frac{1}{|\zeta|} > \frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|A^n\|}$ وبالتالي فإن التابع $h(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1}$ تحليلي في كل نقطة λ_0 من $\rho(A)$ كما أن $h\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \omega(\xi)$ تحليلي في أي مجموعة Δ من المستوي العقدي C وبالتالي فإن نصف قطر التقارب هو r نصف قطر أكبر قرص دائري مفتوح مركزه في المبدأ ويقع بأكمله في Δ ويكون $\frac{1}{r}$ نصف قطر أصغر دائرة في المستوي العقدي مركزها في المبدأ وخارجها يقع بأكمله في $\rho(A)$ وبالتالي فإن : $r_{\sigma(A)} \le \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|A^n\|} \le r_{\sigma(A)}$ وبالتالي $r_{\sigma(A)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \frac{1}{r}$

جواب السؤال الثالث (١٥+١٠=٢٥ درجة):

أ)- ليكن X فضاء خطي منظم ومتراص أي أن X شبه متراصة وبالتالي من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد لـ X شبكة $-\varepsilon$ منتهية ، لنأخذ المتتالية $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\varepsilon_n > 0$ و $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ ، عندئذٍ يوجد لـ X شبكة $-\varepsilon_n$ منتهية وهي N_{ε_n} وذلك أياً كان $n = 1,2,\ldots$ أي أنه من أجل أي عنصر $x \in X$ يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x - y_n\| < \varepsilon_n$ ، لنضع $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n}$ فنجد أن هذه المجموعة كثيفة وقابلة للعد إذن الفضاء X فصول .

المجموعة كثيفة لأن : حتى تكون المجموعة N كثيفة يجب أن تكون لصاقتها تساوي الفضاء X كله أي أن تكون كل نقطة $x \in X$ نقطة لاصقة بالمجموعة ، لإثبات ذلك يجب أن نثبت أن أي كرة مفتوحة

مركزها x تتقاطع مع N وهذا واضح ، لتكن $K(x,\varepsilon_n)$ كرة مفتوحة فحسب ما سبق يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x - y_n\| < \varepsilon_n$ وهذا يعني أن $y_n \in K(x,\varepsilon_n)$ وبالتالي $y_n \in N_{\varepsilon_n} \bigcap K(x,\varepsilon_n)$ وبالتالي $y_n \in N \bigcap K(x,\varepsilon_n)$ وبالتالي $N \bigcap K(x,\varepsilon_n) \neq \phi$
وبالتالي فإن كل كرة مفتوحة مركزها x تتقاطع مع N وهو المطلوب .

وواضح أن المجموعة N قابلة للعد لأنها اجتماع قابل للعد لمجموعات منتهية ،فهو فصول.

الفضاء تام لأن: لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أساسية من الفضاء X هذا يعني انه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث أن $n,m > n_0$ ، $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ وبما أن X متراصة فإنه توجد في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة من عنصر من X
ولتكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \in X$ وبالتالي من أجل أي عدد k يكون :
$\|x_k - x_0\| \le \|x_{n_k} - x_k\| + \|x_{n_k} - x_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ وهذا يعني أن المتتالية الأساسية الاختيارية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العنصر $x_0 \in X$ وبالتالي X تام ، وهو المطلوب .

ب)- لنفرض جدلاً $\sigma(A) = \phi$ عندئذ $\rho(A) = C$ وحسب المبرهنة السابقة فإن المؤثر الحلال $R_\lambda(A)$ تحليلي على كل المستوي العقدي C وبالتالي نستنتج حسب التحليل العقدي أن المؤثر $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ هو تابع ثابت أي أن $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = const$ وبما أن $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \|R_\lambda(A)\| = 0$ فإن $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = 0$ وهذا غير صحيح كون الفضاء B يحوي عناصر غير الصفر أي أن $B \neq \{0\}$ وبالتالي فإن الفرض الجدلي خاطئ وهو المطلوب .

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة) :لدينا $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_2$ ، $c = 1$ ، $\|Ax\|_{\ell_2} \le c\|x\|_{\ell_2}$
فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما أن المؤثر $x \neq 0 \in X$ ينقل كل مجموعة محدودة M في ℓ_2 المنطلق إلى مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد ($\ell_2^{(n)}$ الإيزومورفي مع C^n)
وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراصة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراصة.

نهاية هذه المتتالية $\lim\limits_{n \to \infty} A_n x = \lim\limits_{n \to \infty} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) = (\xi_1, \xi_2, \dots) = x = Ix$ ومعروف أن المؤثر I غير متراص في الفضاء غير المنتهي البعد (لان تقارب المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر I هو تقارب نقطي وليس بانتظام).

- كي يكون المؤثر مؤثر **إسقاط** يجب أن يحقق $A^* = A$ & $A^2 = A$.

وبما أن $I^* = I$ & $I^2 = I$ أي تحقق شروط مؤثر الإسقاط اذن المؤثر مؤثر إسقاط .

كي يكون **مؤثر موجباً** يجب تحقق $\langle Ax, x \rangle \ge 0$. لدينا

$$\langle Ix, x \rangle = \left\langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots), (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \right\rangle_{\ell_2} =$$

$$\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + ... + \xi_n\bar{\xi}_n + 0 + 0 + ... = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + ... + |\xi_n|^2 \ge 0$$

اي أن المؤثر مؤثر موجباً أيضاً .كي يكون المؤثر **ايزومتري** يجب تحقق $\langle Ax, Ay\rangle_{\ell_2} = \langle x, y\rangle_{\ell_2}$

.وبما أن $I = A$ نجد أن: $\langle Ix, Iy\rangle_{\ell_2} = \langle x, y\rangle_{\ell_2}$ اذن المؤثر ايزومتري .

جواب السؤال الخامس (١٠+١٥=٢٥ درجة):

١)- بما أن A^{-1} موجود وخطي ومحدود عندئذٍ فإن $\lambda = 0 \notin \sigma(A)$ وبالتالي كل عدد $\lambda \in \sigma(A)$ يمكن كتابته بالشكل $\lambda = \frac{1}{\mu}$ حيث μ عدد مناسب ومغاير للصفر .

لنثبت صحة التكافؤ : $\mu \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1})$

بفرض $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow$ موجود $\left(A^{-1} - \frac{1}{\mu}I\right)^{-1} \Leftrightarrow$ موجود $\left(-\frac{1}{\mu}A^{-1}(A - \mu I)\right)^{-1} \Leftrightarrow$ موجود $-\mu A(A - \mu I)^{-1} \Leftrightarrow$ موجود $(A - \mu I)^{-1} \Leftrightarrow$ موجود ومحدود ومعرف $(A - \mu I)^{-1}$ على كل الفضاء $B \Leftrightarrow \mu \notin \sigma(A)$ وبالتالي التكافؤ $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu \notin \sigma(A)$ صحيح

وبالتالي التكافؤ التالي صحيح $\frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu \in \sigma(A)$ وهو المطلوب .

٢) - ليكن H فضاء هيلبرت و A مؤثر خطي ومحدود و $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ قاعدتين و. $\langle Au_n, v_m\rangle$ عوامل فورييه لـ Au_n بالنسبة للقاعدة $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ ولنفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2 < \infty$ وحسب مساواة بارسيفال $\|Au_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2$ ندعو العدد $N(A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Au_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ <u>بنظيم هيلبرت شميث</u> للمؤثر A .

-<u>(شكل ثنائي الخطية) :</u> ليكن $L : H \times H \to C : (x, y) \mapsto L(x, y)$ ندعو L شكلاً ثنائيّ الخطية إذا كان من أجل أي $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ وأي $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in H$ يتحقق الشرطان:

1. $L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y)$.
2. $L(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \overline{\mu_1} L(x, y_1) + \overline{\mu_2} L(x, y_2)$.

و نقول عن ثنائي L الخطية محدود إذا وجد عدد $c > 0$ بحيث يكون $|L(x, y)| \le c\|x\|\|y\|$.

مدرس المقرر

انتهت الإجابات

الدكتور سامح العرجه

حمص ١٦/١/٢٠١٨م.